ROZWIĄZANIE ZADANIA 2

Obliczmy granicę ciągu występującą po prawej stronie rozważanej nierówności:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2+16\right)}{n^3-64}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{16}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{64}{n^3}\right)}=1 \quad \textbf{(2p)}$$

oraz wartość logarytmu: $\log_{1,5}\left(3^{-2}\sqrt[3]{8^2}\right)=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^2=-2$. **(2p)**

Nierówność po uproszczeniu ma więc postać:

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-2}>1$$

Dziedziną nierówności jest zbiór: $D=\langle 2,\infty)$. Zauważmy ponadto, że dla każdego $x\in D$ lewa strona rozważanej nierówności jest liczbą dodatnią. **(2p)**

Podnosząc do potęgi drugiej obie strony nierówności, otrzymujemy:

$$x-2\sqrt{x(x-2)}+x-2>1$$

$$2x-3>2\sqrt{x(x-2)} \quad \textbf{(2p)}$$

Zauważmy, że dla każdego $x\in D$ lewa strona powyższej nierówności jest liczbą dodatnią.

Podnosimy do potęgi drugiej obie strony tej nierówności i dostajemy:

$$4x^2-12x+9>4x^2-8x$$

Stąd: $4x<9$ **(2p)**

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności jest zbiór $\langle 2,2\frac{1}{4})$, więc jedyną liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest $x=2$. **(1p)**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3

Niech $a,b,c \in \mathbf{N}_+$ będą kolejnymi bokami trójkąta prostokątnego. Z treści zadania wynika następujący układ równań:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{1}{2}ab \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2}ab-a-b \\ a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}ab-a-b\right)^2 \end{cases} \qquad \textbf{(2p)}$$

Przekształcamy kolejno drugie równanie otrzymanego układu równań:

$$a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}ab-a\right)^2-2\left(\frac{1}{2}ab-a\right)b+b^2$$

$$a^2+b^2=\frac{1}{4}a^2b^2-a^2b+a^2-ab^2+2ab+b^2$$

$$\frac{1}{4}a^2b^2-a^2b-ab^2+2ab=0 \qquad \textbf{(2p)}$$

$$ab\left(\frac{1}{4}ab-a-b+2\right)=0 \qquad \textbf{(1p)}$$

$\Rightarrow$ $a=0$ sprzeczność z warunkami zadania **(1p)**

lub $b=0$ sprzeczność z warunkami zadania **(1p)**

lub $\frac{1}{4}ab-a-b+2=0 \quad /\cdot 4$

$$a(b-4)=4(b-2) \quad /:(b-4) \qquad b\neq 2 \wedge b\neq 4$$

$$a=\frac{4b-8}{b-4}=4+\frac{8}{b-4} \qquad \textbf{(1p)}$$

Z założenia $a,b\in \mathbf{N}_+$, więc $b-4$ musi być naturalnym dzielnikiem 8. Wobec tego :

$b-4\in\{1,2,4,8\}$ czyli: $b\in\{5,6,8,12\}$. **(1p)**

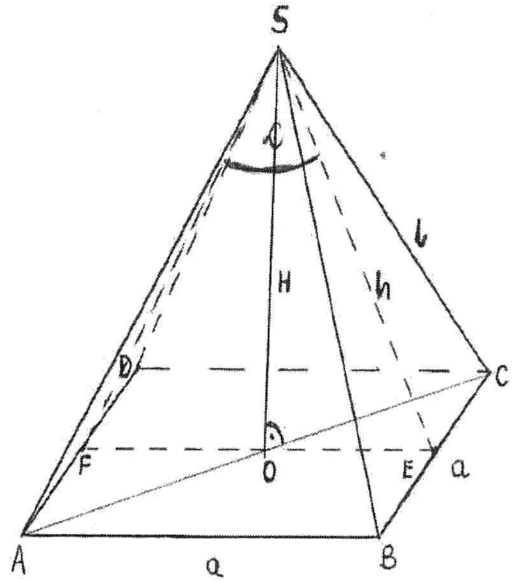
Otrzymujemy następujące „trójki" długości boków:

$a=12,\ b=5,\ c=13$ lub $a=8,\ b=6,\ c=10$ lub $a=6,\ b=8,\ c=10$ lub $a=5,\ b=12,\ c=13$. **(1p)**

Ostatecznie stwierdzamy , że są dwa trójkąty prostokątne spełniające warunki zadania:

trójkąt o bokach $5, 12, 13$ oraz trójkąt o bokach $6, 8, 10$. **(1p)**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4



Wprowadźmy następujące oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

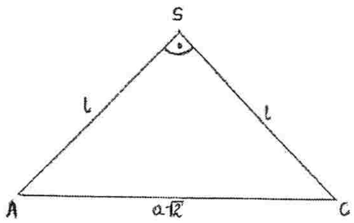
l – długość krawędzi bocznej ostrosłupa,

H – wysokość ostrosłupa,

h - wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

α - miara kąta pomiędzy wysokościami przeciwległych ścian bocznych ostrosłupa.

(1p)

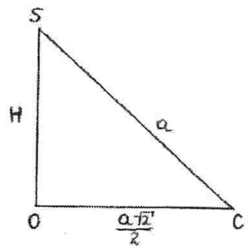


Z treści zadania wynika, że trójkąt ASC jest prostokątny i równoramienny oraz $|AC| = a\sqrt{2}$.

Zatem z twierdzenia Pitagorasa mamy $l^2 + l^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2$.

Stąd $l = a$. **(1p)**

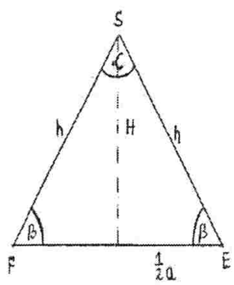
Na podstawie powyższej zależności stwierdzamy, że trójkąt BSC jest równoboczny, więc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ **(1p)**



Trójkąt OSC jest prostokątny, zatem $H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$

Stąd $H = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. **(1p)**

Wyznaczymy teraz sinus kąta pomiędzy wysokościami ścian bocznych ostrosłupa.



Korzystając z trójkąta ESF mamy:

$\sin\alpha = \sin(180° - 2\beta) = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$. **(1p)**

$\sin\beta = \frac{H}{h} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\qquad \cos\beta = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(2p)**

Zatem $\sin\alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **(1p)**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 5

Oznaczmy przez P dowolny punkt krzywej $y=\frac{27}{x^3}$: $P=\left(a,\frac{27}{a^3}\right)$, $a>0$. **(1p)**

Odległość punktu P od prostej l: $x+y=0$: $d(P,l)=\frac{\left|a\cdot 1+\frac{27}{a^3}\cdot 1\right|}{\sqrt{2}}$ **(1p)**

Z założenia $a>0$, więc: $d(P,l)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+\frac{27}{a^3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{a^4+27}{a^3}}_{f(a)}=\frac{1}{\sqrt{2}}f(a)$ **(2p)**

Najmniejsza odległość punktu P od prostej l będzie dla tej wartości a, dla której funkcja $f(a)$ osiąga minimum.

Wobec tego wyznaczymy minimum funkcji $f(a)$:

$$f'(a)=\left(\frac{a^4+27}{a^3}\right)'=\frac{4a^3\cdot a^3-3a^2\left(a^4+27\right)}{a^6}=\frac{a^6-81a^2}{a^6}=\frac{a^4-81}{a^4}=\frac{(a-3)(a+3)\left(a^2+9\right)}{a^4}$$ **(2p)**

$$f'(a)=0 \Leftrightarrow (a=-3 \vee a=3) \wedge a>0 \Rightarrow a=3$$ **(1p)**

$$f'(a)>0 \Leftrightarrow (a<-3 \vee a>3) \wedge a>0 \Rightarrow a>3$$

$$f'(a)<0 \Leftrightarrow (a>-3 \wedge a<3) \wedge a>0 \Rightarrow 0<a<3$$ **(2p)**

a	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	↘	Minimum lokalne	↗

Punktem leżącym najbliżej prostej l jest $P=\left(3,\frac{27}{3^3}\right)=(3,1)$. **(1p)**